Karnaugh-Veitch-Diagramm

Begriffe die für das Verständnis notwendig sind:

Hamming-Distanz:

Die Hamming Distanz beschreibt den Unterschied zweier (binär) dargestellter Zahlen. Unterscheiden Sich zwei Binärzahlen nur in einer Stelle, so besitzen sie die Hamming-Distanz eins. Sind Zwei Bits der Zahlen unterschiedlich die Distanz Zwei, usw...

Gray-Code:

Der Gray-Code ist eine spezielle Codierung von Zahlen, hierbei werden alle darstellbaren Zahlen auf solch eine Art und weise verknüpft, dass die Hammingdistanz zwischen benachbarten Zahlen den Wert 1 besitzt.

Wertetabellen:

Wertetabellen beinhalten als Parameter alle Eingänge, und Ausgänge. Unter den Eingängen werden alle möglichen Kombinationen der Werte angenommen. Unter den Ausgangsvariablen ist die Schaltfunktion Codiert.

Beispiel:
Gegeben sei folgende Werteverlaufstabelle

	x_2	x_1	x_0	y
I	0	0	0	0
II	0	0	1	1
III	0	1	0	1
IV	0	1	1	0
V	1	0	0	0
VI	1	0	1	0
VII	1	1	0	1
VIII	1	1	1	1

1. Aufgabe :
Die disjunktive Normalform ist direkt aus der Wertetabelle abzulesen!
$y = (\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0) \vee (\neg x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$

wenn man sich diese disjunktive Normalform jetzt ansieht, erkennt man schnell, das sie noch nicht Minimal ist, und unter Umständen noch aufwendige Umformoperationen nach sich zieht.

Das ist genau der Existenzgrund, wozu KV-Diagramme existieren. Mit ihnen ist es möglich kurz und unkompliziert die minimale DNF oder auch KNF abzulesen.

ein KV-Diagramm besteht genau aus sovielen Feldern, wie es Kombinationsmöglichkeiten der Eingangsvariablen gibt. Bei unserem Beispiel sind es Acht, wie die Nummerierung zeigt.

Die Felder im KV müssen im Graycode angeordnet sein, das heißt alle benachbarten Felder müssen die Hamming-Distanz 1 besitzen. Hierbei gilt das du untersten Zeile nach unten mit der Obersten benachbart ist, und links und rechts genauso.
Wenn man es sich als räumliches Gebilde vorstellen möchte, so besäße das was man erhielte die Form eines Donuts oder Ringes. Aber nen Ring ist ja auch nen Donut ;-)

			x_2
		000	100
	x_0	001	101
x_1	x_0	011	111
x_1		010	110

I	V
II	VI
IV	VIII
III	VII

0	0
1	0
0	1
1	1

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

Hier ist das KV in 4 Stufen hergeleitet, wobei nur das Letzte als KV bezeichnet wird.

Die Linke Tabelle zeigt die im Graycode ausgefüllte Tabelle... mit den Markierungen, an welchen Stellen die Zellen für die entsprechenden Variablen den Wahrheitswert 1 besitzen.

Die Zweite von Links zeigt, wie man sich die Eintragungen anhand der Zeilen in der Werteverlaufstabelle merken kann.

Das Dritte Sind die entsprechenden Werte für den Ausgang, der zu der dort codierten Zeile.

Im Vierten sind nur noch die Markierungen aus dem ersten Diagramm übernommen, damit wir wissen wo die Variablen den Wert 1 haben.

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

So in diesem KV müssen wir nur noch die Einser Blöcke ermitteln, und wenn wir alle Einser abgedeckt haben, verknüpfen wir die erhaltenen Blöcke durch oders, und haben eine minimale DNF.

Man versucht dabei so viele Einser wie möglich, auf einmal zu markieren.

Markierungsschritt 1:

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als ersten MIN-Term: $x_2 \wedge x_1$

Markierungsschritt 2:

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als Zweiten MIN-Term: $\neg x_0 \wedge x_1$

Markierungsschritt 3:

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als Dritten MIN-Term: $\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0$

die minimale DNF ist also: $(\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0) \vee (\neg x_0 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1)$

Das ermitteln der KNF erfolgt analog, nur das man hier nicht versucht die Einserblöcke abzudecken, sondern die Nullerblöcke. Ausgelesen werden die Wahrheitswerte hier negiert. Und Am Ende werden alle MAX-Terme durch Konjunktionen verbunden.

KNF ermitteln:

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als ersten MAX-Term: $\neg x_2 \vee x_1$

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als zweiten MAX-Term: $x_1 \vee x_0$

			x_2
		0	0
	x_0	1	0
x_1	x_0	0	1
x_1		1	1

wir erhalten als dritten MAX-Term: $x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0$

Somit lautet die KNF: $(x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0) \wedge (x_1 \vee x_0) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$