Hilbert Kalkül

Das Hilbert Kalkül ist eine Kalkül der Aussagenlogik, indem mithilfe des Schließens (ähnlich dem mathematischen Folgern) ermittelt wird, ob sich eine Formel aus einer gegebenen Formelmenge herleiten lässt. Die Herzuleitende Formel also erfüllbar, und sogar gültig ist.

Das Symbol des Hilbert Kalküls ist: $\vdash$ es bedeutet soviel wie, der Rechte Teil folgt aus dem Linken. Es ist Bedeutungsäquivalent mit $\models$. Im Hilbert Kalkül wird jedoch nur $\vdash$ benutzt, da man hier von einer Ableitbarkeit im Kalkül spricht. Wohingegen dieses Zeichen $\models$ eine semantische Folgerung beschreibt. Es lässt sich jedoch ein Korrektheitsbeweis ($\vdash \rightarrow \models$)und ein Vollständigkeitsbeweis ($\models \rightarrow \vdash$) führen, dass beide Zeichen Äquivalent sind.

Im Hilbert-Kalkül wird im Wesentlichen mit der Hilfe von 3 elementaren Handlungen Beweis geführt. Handlung (1) ist das Erstellen einer Instanz eines Axioms. Handlung (2) ist das Aufstellen einer Hypothese, und Handlung (3) ist das Verwenden des Modus Ponens.

Axiome

Als erstes etwas genauer zu Handlung (1). Das Hilbert-Kalkül befleißigt sich gewisser Aussagenlogischer Tautologien, also Formeln, die angewand in allen Fällen den Wahrheitswert 1 zurückliefern. Eine Solche Tautologie ist zum Beispiel: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ und wird Axiom genannt. A und B fungieren in dieser Formel als Platzhalter, und können gegen jede andere beliebige atomare Formel ausgetauscht werden. Insgesamt umfasst das Kalkül 16 verschieden Axiome.

Hypothese

Nun etwas genauer zu Handlung (2). Als Aufstellen einer Hypothese bezeichnet man die Handlung, die aus einer gegebenen Formelmenge eine Formel herleitet, die in dieser Formel bereits enthalten ist. Und da die gegebene Formelmenge bereits erfüllbar ist, so muss auch die Teilmenge (also jede einzelne Formel) erfüllbar sein.

Bsp: Man soll aus der Formelmenge M irgendeine Formel herleiten. Die atomare Formel A sei Teilmenge der Formel M. Und da M erfüllbar ist, wissen wir das auch A erfüllbar ist. Also können wir A aus der Formelmenge herleiten.

formal:

$M = \{A, B, C\}$

$M \vdash A$ Hypothese

Modus Ponens

Der Modus Ponens, ist das Schließen auf die Herleitbarkeit einer Teilformel. Aufgrund des anderen Teils dieser Formel, und einer weiteren bereits hergeleiteten Formel lässt sich dieser Schluss ziehen.

Bsp.: M sei eine Formelmenge , A, B seien atomare Formeln.

dann gilt wenn $M \vdash A$

und $\underline{M \vdash A \rightarrow B}$

$M \vdash B$

zum besserem Verständnis ein Beispiel für die Anwendung des Hilbert Kalküls:

Also gegeben sind folgende 5 Axiome:

(1) $F \rightarrow (G \rightarrow F)$

(2) $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$

(3) $(\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow F)$

(4) $F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$

(5) $(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$

Die Aufgabe besteht jetzt darin aus der leeren Formelmenge die Formel $A \to A$ herzuleiten.
Also $\vdash A \to A$.

Schritt 1:	$\vdash A \to ((B \to A) \to A)$	Instanz von Axiom (1) (F zu A, G zu $(B \to A)$)
Schritt 2:	$\vdash (A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$	Instanz von Axiom (2) (F zu A, G zu $(B \to A)$, H $\to$ A)
Schritt 3:	$\vdash (A \to (B \to A)) \to (A \to A)$	Modus Ponens aus Schritt 1. & 2.
Schritt 4:	$\vdash A \to (B \to A)$	Instanz von Axiom (1) (F zu A, G zu B)
Schritt 5:	$\underline{\underline{\vdash A \to A}}$	Modus Ponens aus Schritt 3. & 4.