Herbrand Theorie

Da es unentscheidbar ist festzustellen, ob eine gegebene prädikatenlogische Formel ein Modell besitzt oder nicht, wurde die Herbrandt Theorie entwickelt. Hier werden potentielle Modelle mithilfe einer (algorithmischen) Suche daraufhin untersucht, ob sie tatsächlich ein Modell stellen.

Die Herbrandt-Theorie kann angewand werden bei abgeschlossenen Formeln in Skolem-Form.
Eine Formel ist genau dann abgeschlossen, wenn sie keine freien Variablen mehr enthält.

Die Idee der Herbrand-Theorie ist, eine Struktur für eine gegebene Formel zu schaffen, sodass die prädikatenlogischen Symbole wie aussagenlogische Symbole behandelt werden können. Hierfür ist es nötig das Universum einzuschränken. Und dies ist nur möglich, wenn in der Formel zunächst keine freien Variablen mehr vorkommen, und später alle gebundenen Variablen durch Elemente des neu geschaffenen Universums ersetzt werden können. Die Aussagenlogik arbeitet ja nicht auf Variablen, sondern nur auf Konstanten, die entweder wahr oder falsch sein können. Die Idee ist deshalb, dass man alle Variablen nach und nach durch Konstanten ersetzt.
Für diese Ersetzungen wird das Herbrand-Universum aus der Skolemform ermittelt. Dieses Herbrand-Universum wird dann im folgenden als Standard-Grundbereich, bei der Suche nach Modellen verwendet.

Das Herbrand-Universum
Das Herbrand-Universum wird gebildet von allen in der Formel vorkommenden n-stelligen Funktionssymbolen. Das heißt es sind in ihm alle Konstanten der Formel enthalten (=nullstellige Funktionen) sowie alle sonstigen Funktionen die in einer Formel auftreten. Und alle ihre möglichen Kombinationen und Verschachtelungen.
(Die Funktionen sind enthalten, da ja eine Funktion angewand auf ein Element des Universums wieder ein Element des Universums zurückliefert, und was kann da schon groß geliefert werden, wenn das Universum auf Konstanten und Funktionen beschränkt wird ;-)
Enthält die Formel selbst keine Konstante, so wird dem Herbrand Universum eine Konstante zugeordnet.
Das Herbrand Universum wird bezeichnet als D(F).

Beispiele:

$$F = \forall x \forall y \forall z\, P(x, f(y), g(z,x))$$
$$G = \forall x \forall y\, Q(c, f(x), h(y,b))$$

Das Herbrand-Universum für die Formel F ist also:

$D(F) = \{ a , f(a), g(a,a), f(g(a,a)), g(f(a), a), g(f(a),f(a)), g(a,f(a)), f(f(a)) ... \}$

<u>zur Erklärung:</u> wie man sieht sind in der Formel alle vorkommenden Variablen gebunden, was Vorraussetzung für die Anwendbarkeit der Theorie ist. Leider sind in ihr keine Konstanten (also nullstellige Funktionen) enthalten. Deshalb wird dem Universum einfach eine Konstante zugeordnet (hier heißt sie a). Mit den beiden Funktionen, f und g, die in der Formel enthalten sind, lässt sich jetzt das komplette Herbrand-Universum für diese Formel angeben. Es besteht aus allen möglichen Kombinationen dieser Funktionen.

Und für die Formel G ist also:

$D(G) = \{ b , c, f(a) , f(b), h(b,b), h(b,c), h(c,b), h(c,c), h(f(b),b), h(b,f(b)), ... \}$

<u>zur Erklärung:</u> In der Formel G sind zwei Konstanten enthalten, diese werden in das Herbrand-Universum übernommen. Es muss, und es wird keine weitere Konstante mehr hergezaubert werden. Zusammen mit den Funktionen f und h aus der Formel, muss man jetzt wieder alle möglichen Permutationen zwischen diesen Elementen bilden. Und so erzeugt man hier das Herbrand-Universum.

Herbrand-Struktur

Die Herbrand Struktur, ist jede Struktur ($\mathcal{A}(U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$) die zu F passend ist, und bei der dass Universum $U_{\mathcal{A}}$ gleich dem Herbrand Universum (D(F)) ist. Ausserdem wird die Interpretation der Funktionssymbole wie folgt festgelegt:

$$f^{\mathcal{A}}(a) = f(a)$$
$$f^{\mathcal{A}}(f(a)) = f(f(a))$$
$$f^{\mathcal{A}}(g(a,a)) = f(g(a,a)) \quad usw.$$

<u>Zur Erklärung:</u> bei dieser Definition werden die Funktionen, also als sie selbst interpretiert. Das heißt sozusagen, dass wenn diese Herbrand-Strucktur ein Modell besitzt, dann stellen die enthaltenen Funktionen selbst das Modell. Die Funktionen werden also auf eine aussagenlogische Interpretatierbarkeit "heruntergekürzt". Weshalb auch im Folgenden logisch erscheinen dürfte, dass Jedes Modell der Herbrand Strucktur auch ein Modell für die Formel ist. Dieses Modell heißt Herbrand-Modell.
Formal ausgedrückt sieht das was ich grad beschrieben hab so aus: $\mathcal{A}_{[x/t]}(F) = (F[x/t])$
Nochmal mit anderen Worten erklärt heißt das, wir schaffen eine neue Struktur, bei der alle Vorkommen von x den Wert t erhalten $\mathcal{A}_{[x/t]}(F)$). Dieses t, oder "neue" x, kann dann wieder auf die alte Formel angewand werden. Das ist wie beim Programmieren, wenn wir eine ;bUbm

betrachten können, können wir jetzt folglich auch die gesamten Formeln aussagenlogisch betrachten.
Da wir in E(F) schon alle Ersetzungen die möglich sind durchgeführt haben, ist es auch nicht mehr nötig hier einen Grundbereich anzugeben, der beschränkt sich ja auch auf den Inhalt der Formeln, und wird repräsentiert durch den Wahrheitswert, der atomaren Formeln, in diesen Formeln. Was auch eine Interpretation dieser Terme sinnlos macht.

Satz von Gödel-Herbrand-Skolem
Für jede Aussage F in Skolemform gilt: F ist erfüllbar, genau dann, wenn die Formelmenge E(F) (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Aus diesem Satz folgt, dass es nicht reicht ein Modell für eine Formel in E(F) zu finden die erfüllbar ist, sondern das vielmehr alle Formeln in E(F) den aussagenlogischen Wahrheitswert 1 besitzen. Nur in diesem Fall ist dieses Modell auch ein Herbrand-Modell und folglich ein Modell für die Skolemform. Somit wäre die Skolemform erfüllbar.

Nach dem Endlichkeitssatz ist eine Menge genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge der Menge erfüllbar ist.
Logischerweise gilt auch genau das Entgegengesetzte. Also ist eine endliche Teilmenge der Formel unerfüllbar, so ist auch die Formelmenge selbst unerfüllbar.

Da es im allgemeinen schwieriger ist eine Aussage darüber zu treffen, ob alle Formeln wahr sind, als nur eine Formel zu finden, die nicht wahr ist, wird das Problem der Entscheidbarkeit hier auf das Problem der Unentscheidbarkeit zurückgeführt. Das Problem bei diesem Verfahren ist jedoch, dass es nur stoppt, sofern in der Formelmenge eine Formel gefunden wird, die Unerfüllbar ist. Deshalb nennt man dieses Verfahren auch semi-entscheidbar.

Algorithmus von Gilmore
Im Algorithmus von Gilmore, wird eben diese Tatsache angewandt. Hier werden alle Formeln der Herbrand Expansion, durch Konjunktionen verbunden, und da diese Formeln aussagenlogisch ausgewertet werden können, kann auch eine Auswertung über die Formelmenge getroffen werden. Da es aber unmöglich ist, für eine unendliche Menge an Formeln, eine Konjunktion dieser zu überprüfen, geht der Algorithmus so vor, dass er eine gewisse Menge an Teilformeln auf ihre Erfüllbarkeit hin überprüft. Nachdem die Überprüfung keine Unerfüllbarkeit festgestellt hat, wird dieser Menge eine weitere Formel aus der Herbrand-Expansion hinzugefügt, und der Test wiederholt. Der Test beginnt bei einer Menge von einer Formel, und endet, wenn eine Teilformel unerfüllbar ist. Sind alle Teilformeln jedoch erfüllbar, wird der Algorithmus nie enden. Deshalb semi-entscheidbar.

Algorithmus Formal:

$E(F) = \{F_1,F_2,F_3...\}$
n:= 0 ;
repeat n:= n + 1 ;
until $(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge ... \wedge F_n)$ ist unerfüllbar
Put(“unerfüllbar”) ;
end.