Das Pumping Lemma

Für das Pumping Lemma gilt erst einmal, es ist immer wahr, wenn eine Sprache, eine reguläre Sprache ist.

Pumping Lemma am Beispiel:

Aufgabe: Ist $L = \{ a^x b^x \mid x >= 1 \}$ eine reguläre Sprache?

Für die Durchführung des Beweises mithilfe des Pumping-Lemmas, ist es zuerst notwendig sich eine beliebige Zahl m zu wählen. Diese Zahl m ist die Pumping-Lemma-Zahl. Anhand der gewählten Zahl m, wähle ich nun ein spezielles Wort der Sprache, nämlich genau dieses welches mit m entsteht. (Also $a^m b^m$). In der Folge muss ich jetzt noch zeigen, dass dieses Wort, ich gebe ihm den Namen z, wirklich ein Wort der Sprache ist. In diesem Fall ist dieser Beweis nicht wirklich notwendig, da selbst für einen blinden offensichtlich sein müsste, das das Wort z Teil der Sprache L ist. Also es gilt, das $a^m b^m = z \in L$.

Hiermit ist es bereits gelungen einen Großteil der Vorraussetztungen für die Anwendungen des Lemmas zu schaffen.
Als nächstes Lege ich einfach fest, dass das von mir gewählte Wort z, auf die nachfolgendes Weise zerlegt werden könne.
Also ich lege fest, ich kann mein Wort in drei Teile Zerlegen. In einen Teil u, in einen Teil v und in einen Teil w. Wobei **uvw = z** sei.

Im folgenden definiere ich, wie diese drei Teile **u**, **v** und **w** beschaffen sein sollen.

v

Ich sage also aus, das mein Teil **v** nur aus a's bestehen darf. Und da wir mindestens ein a benötigen, damit das Wort Teil der Sprache ist, definiere ich die Anzahl dieser a's in **v** als x. Und x sei eine Zahl zwischen 1 und m. m wähle ich als grenze, da ja maximal m a's auftreten können. Wir zerlegen ja immernoch das Wort z. Und das lautet nunmal $a^m b^m$.
(formal: $v = a^x$, $x = 1 \ldots m$, wobei $|v| = x$)

u

Über u treffe ich eine ähnliche Aussage. u bestehe ebenfalls nur aus a's da wir aber unter Umständen schon m a's haben, durch die Wahl des x bei v, müssen wir jetzt auch davon ausgehen, das dieser Teil des Wortes unter Umständen auch kein Zeichen umfasst. Da v aber mindestens ein a lang ist, können wir als maximale Anzahl der a's, hier jedoch m-1 annehmen.Die Anzahl der a's in u bezeichne ich einmal mit y.
(formal: $u = a^y$, $y = 0 \ldots m-1$, wobei $|u| = y$)

w

Der Teil des Wortes z, der sozusagen den Gesamten restlichen Müll enthält. Es besteht also zuerst einmal aus der Anzahl an a's, die durch die Teile u und v nicht abgedeckt werden. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn m gleich drei, x und y jedoch nur 1 sind. Dann muss eines der a's noch in w enthalten sein. Ausserdem umfasst das Teilwort w auch alle b's. Also m Stück.
(formal: $w = a^{m-x-y} b^m$)

Durch die Definitionen, wie diese Teilwörter von L aussehen sollen, haben wir indirekt noch 2 ziemlich wichtige Gesetzmäßigkeiten erhalten. Nämlich als
(1)$|uv| \leq m$ (die Anzahl der a's der beiden Teilwörter u und v ist in der Summe höchstens m)
(2)$|v| \geq 1$ (die Anzahl der a's im Teil v ist mindestens 1)

Um den Beweis mit dem Pumping Lemma sinnvoll fortzusetzen mach ich hier erstmal einen Einschub, der zum Verständnis beitragen soll.

Also noch einmal zum Sinn des Pumping Lemmas zurück.
Wir wissen schon, dass wenn eine Sprache regülär ist, dann gilt das Pumping Lemma.
Und da wir uns in gewisser Weise auch mit Logik beschäftigen, drücken wir dies einmal als Aussagenlogische Formel aus. Also:

Reg. Spr. → Pump. Lemma ist eine w.A.

um diese Aussagenlogik jetzt noch auf die Wahrheitswerte zurückzuführen, es gilt hier also aus 1→1. An dieser Implikation, sieht man auch schön, dass es nicht unbedingt bedeutet, das eine Sprache regulär ist, wenn sie das Pumping Lemma erfüllt, denn auch 0→1 ist eine wahre Aussage. Das heißt das durchaus auch nichtreguläre Sprachen dieses Lemma erfüllen können. Ebenso sieht man, dass jede reguläre Sprache das Pumping Lemma erfüllt. Denn wäre dies nicht der Fall, so stände aus 1→0, und das ist keine wahre Aussage. Ganz besonders interressant für die Fortsetzung des Beweises ist jedoch die Implikation 0→0. Denn können wir beweisen, das die vorliegende Sprache das Pumping Lemma nicht erfüllt. So wissen wir auch, das die Sprache nicht regulär ist. Wir überprüfen jetzt technisch gesehn die Sprache eigentlich darauf, ob sie nicht nichtregulär ist. Und dies lässt sich am besten mit der Definition des Lemmas durchführen.

Die Definition des Lemmas lautet:
$(\exists m)(\forall z \in L, |z| \geq m)(\exists u,v,w)(z=uvw \wedge (1) \wedge (2) \wedge (3))$
(es gibt eine Zahl m sodas für alle Wörter z aus L gilt, sie haben die Länge 2m oder sind länger. Und es Existieren ein u ein v und ein w, für die gilt, das sie z in uvw zerlegen. und das die 3 Gesetze 1 und 2 und 3 gelten)
Gesetz 1 und 2 wurden bereits herausgearbeitet. Gesetz drei sagt jetzt aus das $uv^iw \in L$ ist, und zwar für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Auch dieses Dritte Gesetz lässt sich durch ein wenig Gehirnakrobatik, aus den regeln für u,v und w gewinnen. Hierbei ist die Größe i jedoch beschränkt lediglich durch das Gesetz (1).
Da es wie gesagt viel einfacher ist 0→0 zu zeigen, um zu zeigen das die Sprache nicht regulär ist, als vielmehr für alle Worte zu zeigen, das sie regulär ist, wie es die Definition fordert, arbeitet man viel besser auf der Negation der Definition des Pumping Lemmas. Denn wenn man diese gezeigt hat, so hat man ein Beispiel für 0→0 gefunden. Und die Sprache ist nicht regulär.

Also nochmal:
Die Definition des Lemmas lautet:
$(\exists m)(\forall z \in L, |z| \geq 2m)(\exists u,v,w)(z=uvw \wedge (1) \wedge (2) \wedge (3))$
Daraus folgt die Negation:
$(\forall m)(\exists z \in L, |z| \geq 2m)(\forall u,v,w)(\neg(z=uvw) \vee \neg(1) \vee \neg(2) \vee \neg(3))$
(Für alle Zahlen m existiert ein Wort der Sprache mit einer Länge größergleich 2m, sodass für alle Zerlegungen in u, v und w entweder z=uvw oder 1 oder 2 oder 3 nicht gilt.)

diese Negation ist also zu zeigen. Und es gilt $uv^iw \in L$. Damit ist auch $uv^0w \in L$.

und: $uv^0w = uw = a^ya^{m-x-y}b^m = a^{m-x}b^m$ und da $x \geq 1$ gilt Anzahl a's $\neq$ Anzahl b's $\Rightarrow \notin L$.

Hiermit wurde gezeigt, dass zu jedem Wort einer beliebig wählbaren Größe m, ein Wort gefunden werden kann, sodass es so zerlegbar ist, das es gegen irgendeines der Gesetze oder die Art der Zerlegung verstößt. Die Negation trifft also immer zu, und zeigt uns somit also nicht anderes als 0→0, was soviel heißt wie die Sprache ist nicht regulär.